

文章编号: 0583-1431(2015)06-0953-12

文献标识码: A

图上的 Li-Yau 不等式的一些注记

林 勇

中国人民大学数学系 北京 100872
E-mail: linyong01@ruc.edu.cn

满守东

天津财经大学数学系 天津 300222
E-mail: manshoudong@163.com

摘 要 对于图 G 上热方程 $(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} - q)u = 0$ 的正解 $u = u(x, t)$, 得到图上改进的 Li-Yau 梯度估计不等式, 这里 q 满足 $\Gamma(q) \leq \eta^2$, η 是一个常数, 进而得到改进的 Harnack 型不等式, 推广了以前的结果.

关键词 Li-Yau 不等式; 热方程; 梯度估计; 曲率
MR(2010) 主题分类 05C81, 53C21, 35K08
中图分类 O186.1

Some Remarks on Li-Yau Inequality on Graphs

Yong LIN

*Department of Mathematics, Renmin University of China,
Beijing 100872, P. R. China
E-mail: linyong01@ruc.edu.cn*

Shou Dong MAN

*Department of Mathematics, Tianjin University of Finance and Economics,
Tianjin 300222, P. R. China
E-mail: manshoudong@163.com*

Abstract We obtain improved Li-Yau gradient estimates on graphs for the solutions u to the general heat equation $(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} - q)u = 0$, where q is a potential satisfying $\Gamma(q) \leq \eta^2$ and η is a constant, and get Harnack inequalities, extending previous results.

Keywords Li-Yau inequality; heat equation; gradient estimate; curvature
MR(2010) Subject Classification 05C81, 53C21, 35K08
Chinese Library Classification O186.1

收稿日期: 2014-03-12; 接受日期: 2015-03-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11271011);

中国人民大学科学研究基金: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (11XN1004)

通讯作者: 满守东

1 引言

在 1986 年, Li 和 Yau 在文 [7] 中证明了热方程正解的梯度估计不等式, 如下列定理.

定理 A ^[7] 令 M 表示不含边界的完备流形. 设 $u(x, t)$ 为在 $M \times (0, T]$ 上的下列热方程的正解

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} - q\right)u = 0. \quad (1.1)$$

假设 M 的 Ricci 曲率下界为 $-K$, 这里 $K \geq 0$ 是一个常数. 假设存在一点 $p \in M$, 常数 θ , 函数 $\gamma(r, t)$, 使得在 $M \times (0, T]$ 上, 有 $|\nabla q|(x, t) \leq \gamma(r(x), t)$ 且 $\Delta q \leq \theta$, 这里 $r(x)$ 代表 p 到 x 的距离, 那么有

(i) 如果 $K = 0$ 且 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(r, t)}{r} \leq \tau(t)$, 那么

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \frac{u_t}{u} - q \leq \frac{n}{2}t^{-1} + C\tau^{2/3}(t) + \left(\frac{n}{2}\theta\right)^{1/2}.$$

(ii) 如果对一些 $\gamma_0(t)$, 有 $\gamma(r, t) \leq \gamma_0(t)$, 那么, 对所有 $\alpha \in (1, 2)$

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \frac{\alpha u_t}{u} - \alpha q \leq \frac{n}{2}\alpha^2 t^{-1} + C[\tau_0^{2/3}(t) + (\alpha - 1)^{-1}K + \theta^{1/2}].$$

有关 Li-Yau 不等式相关的结论, 可见文 [3, 5, 8, 10, 12] 和其中引用的文章.

事实上, 对具有非负曲率流形上的 Laplacian 算子, 参数 α 可以被关于 t 的函数 $\alpha(t)$ 代替, 例如:

定理 B ^[1, 6] 令 M 为 n 维的完备流形. 设 $\text{Ricci}(M) \geq -K$, $K \geq 0$. 对任意热方程 $\partial_t u = \Delta u$ 的正解 u 和 $t > 0$, 有

$$|\nabla \log u|^2 - \left(1 + \frac{2}{3}Kt\right)(\log u)_t \leq \frac{n}{2t} + \frac{nK}{2}\left(1 + \frac{1}{3}Kt\right), \quad (1.2)$$

$$|\nabla \log u|^2 - \left(1 + \frac{\sinh(Kt) \cosh(Kt) - Kt}{\sinh^2(Kt)}\right)(\log u)_t \leq \frac{nK}{2}(1 + \coth(Kt)). \quad (1.3)$$

在图上考虑上述不等式. 令 $G = (V, E)$ 表示一个图, 其中, V 为顶点集合, E 为边集. 用 $x \sim y$ 表示 x 与 y 相连, $\{x, y\}$ 表示连接 x 与 y 的边, ω_{xy} 表示边 $\{x, y\}$ 的权. 顶点 x 的度, 用 d_x 表示, 如果对 V 的每个顶点 x , $d_x = \sum_{y \sim x} \omega_{xy} < \infty$, 称 G 是局部有限图.

给定 V 上的有限测度 $\mu: V \rightarrow \mathbb{R}$, 图 G 上的 μ -Laplacian 算子 $\Delta: \mathbb{R}^{|V|} \rightarrow \mathbb{R}^{|V|}$ 定义为

$$\Delta f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \omega_{xy} [f(y) - f(x)].$$

为了计算方便, 如文 [2] 中, 令 $\widetilde{\sum}_{y \sim x} h(y) := \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \omega_{xy} h(y)$.

对于 μ -Laplacian Δ , 设

$$\omega_{\min} := \inf_{e \in E} \omega_e > 0, \quad D_\omega := \max_{y \sim x} \frac{\deg(x)}{\omega_{xy}} < \infty, \quad D_\mu := \max_{x \in V} \frac{\deg(x)}{\mu_x} < \infty.$$

如文 [2] 中, Γ (或 $\mu - \Gamma$) 梯度算子定义如下

$$\begin{aligned} 2\Gamma(f, g) &= 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle(x) = (\Delta(fg) - f\Delta g - g\Delta f)(x) \\ &= \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \omega_{xy} (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)). \end{aligned}$$

简便起见, 记 $\Gamma(f) = \Gamma(f, f) = |\nabla f|^2$. 进一步, Γ_2 算子定义为

$$\Gamma_2(f, g) = \frac{1}{2}(\Delta\Gamma(f, g) - \Gamma(f, \Delta g) - \Gamma(g, \Delta f)).$$

记 $\Gamma_2(f) = \Gamma_2(f, f) = \frac{1}{2}\Delta\Gamma(f) - \Gamma(f, \Delta f)$.

定义 1.1 ^[2] 如果对图 G 的每一个 $x \in V$ 和函数 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, 这里 $f(x)$ 恒正且 $\Delta f(x) < 0$, 有

$$\Gamma_2(f)(x) - \Gamma\left(f, \frac{\Gamma(f)}{f}\right) \geq \frac{1}{n}(\Delta f(x))^2 + K\Gamma(f)(x),$$

或等价地

$$\tilde{\Gamma}_2(f)(x) := \frac{1}{2}\Delta\Gamma(f) - \Gamma\left(f, \frac{\Delta(f^2)}{2f}\right) \geq \frac{1}{n}(\Delta f(x))^2 + K\Gamma(f)(x),$$

称 G 满足指数曲率 - 维数不等式 $\text{CDE}(n, K)$.

众所周知, 链式法则求导在离散空间上是失效的, 因此, 在很长一段时间, 在图上建立 Li-Yau 不等式是很困难的. 近期, Bauer 等在文 [2] 中成功的解决了这个难题, 得到最大值原理的离散形式, 克服了链式法则求导在离散空间上失效的困难, 引入了指数曲率 - 维数不等式 $\text{CDE}(n, -K)$, 并且由在图上建立的 Harnack 型不等式, 得到图上最小特征值的一个上界估计. 但是, 在他们的证明中, 部分方程中仍然使用了链式法则对 t 求导, 如文 [2] 中方程 (4.13), (4.23), (4.24) 等.

本节得到了下列引理 2.4, 从而在证明过程中完全避免了链式法则求导, 得到了改进的 Li-Yau 不等式. 另外, 得到定理 B 的离散形式, 得到形如 (1.2) 和 (1.3) 的不等式. 最后, 得到图上的改进的 Harnack 型不等式和图上最小特征值的上界估计.

2 引理

首先, 引入算子 $L = \Delta - \partial_t$. 在这里, 给出一些在以后的证明中经常用到的引理.

引理 2.1 设 G 是一个有限 (或无限) 图, Δ 是 G 上的 μ -Laplacian 算子. 令 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(x) > 0$, 那么 $\Delta f(x) = 2\sqrt{f(x)}\Delta\sqrt{f(x)} + 2\Gamma(\sqrt{f(x)})$.

证明

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \sum_{y \sim x} [f(y) - f(x)] \\ &= \sum_{y \sim x} [(\sqrt{f(y)})^2 - 2\sqrt{f(x)f(y)} + (\sqrt{f(x)})^2 + 2\sqrt{f(x)f(y)} - 2f(x)] \\ &= 2\sqrt{f(x)} \sum_{y \sim x} [\sqrt{f(y)} - \sqrt{f(x)}] + \sum_{y \sim x} [\sqrt{f(y)} - \sqrt{f(x)}]^2 \\ &= 2\sqrt{f(x)}\Delta\sqrt{f(x)} + 2\Gamma(\sqrt{f(x)}). \end{aligned}$$

证毕.

引理 2.2 ^[2] 设 G 是一个有限 (或无限) 图, 在顶点 x 处, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(x) > 0$, 且 $\Delta f(x) < 0$. 那么

$$(i) \sum_{y \sim x} f(y) < D_\mu f(x); \quad (ii) \sum_{y \sim x} f^2(y) < D_\mu D_\omega f^2(x).$$

引理 2.3 ^[2] 令 G 是一个有限 (或无限) 图, 且函数 $g, F: V \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. 设 $g(x, t) \geq 0$, $F(x, t)$ 在 $(x^*, t^*) \in V \times [0, T]$ 处有一个局部最大值, $t^* \neq 0$. 那么

$$L(gF)(x^*, t^*) \leq L(g)F(x^*, t^*).$$

引理 2.4 令 G 是一个有限 (或无限) 图, Δ 为 G 上的 μ -Laplacian 算子. 设对所有的 $x \in V$ 和 $t > 0$, $\Delta u < 0$, 且 $q = q(x, t)$ 满足 $\Gamma(q) \leq \eta^2$, 这里 $\eta \geq 0$ 是一个常数, 那么有

$$(1) \quad 2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u} - \Delta(qu) \geq -\eta u\sqrt{2D_\mu};$$

$$(2) \quad q\Delta u - \Delta(qu) > -\eta u\sqrt{2D_\mu D_\omega}.$$

证明 由图 G 上 μ -Laplacian 算子 Δ 的定义, 有

$$\begin{aligned} & 2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u} - \Delta(qu) \\ &= \sum_{y \sim x} (\sqrt{u(y)} - \sqrt{u(x)})(q(y)\sqrt{u(y)} - q(x)\sqrt{u(x)}) \\ &\quad + 2q(x)\sqrt{u(x)} \sum_{y \sim x} (\sqrt{u(y)} - \sqrt{u(x)}) - \sum_{y \sim x} (q(y)u(y) - q(x)u(x)) \\ &= \sum_{y \sim x} [q(y)u(y) - q(y)\sqrt{u(x)u(y)} - q(x)\sqrt{u(x)u(y)} + q(x)u(x)] \\ &\quad + \sum_{y \sim x} [2q(x)\sqrt{u(x)u(y)} - 2q(x)u(x)] - \sum_{y \sim x} [q(y)u(y) - q(x)u(x)] \\ &= -\sum_{y \sim x} [q(y) - q(x)]\sqrt{u(y)u(x)} \\ &\geq -\sqrt{2\Gamma(q)} \cdot \sqrt{\sum_{y \sim x} u(y)} \cdot \sqrt{u(x)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\geq -\eta u\sqrt{2D_\mu}. \tag{2.2}$$

这里, 不等式 (2.1) 由 Cauchy-Schwarz 不等式得出, 不等式 (2.2) 由引理 2.2 得出.

用同样的方法, 可以证明此引理中的第 2 个不等式:

$$\begin{aligned} q\Delta u - \Delta(qu) &= q(x) \sum_{y \sim x} [u(y) - u(x)] - \sum_{y \sim x} [q(y)u(y) - q(x)u(x)] \\ &= -\sum_{y \sim x} [q(y) - q(x)]u(y) \geq -\sqrt{\sum_{y \sim x} [q(y) - q(x)]^2} \cdot \sqrt{\sum_{y \sim x} u^2(y)} \\ &> -\sqrt{2\Gamma(q)} \cdot \sqrt{D_\mu D_\omega} u > -\eta u\sqrt{2D_\mu D_\omega}. \end{aligned}$$

证毕.

3 图上的 Li-Yau 不等式

3.1 改进的文 [2] 中的 Li-Yau 不等式

定理 3.1 设 G 为一个有限图, $u = u(x, t)$ 是 G 上热方程 $(L - q)u = 0$ 的一个正解. 令对所有的 $x \in V$ 和 $t \geq 0$, $q = q(x, t)$ 满足 $\Gamma(q) \leq \eta^2$.

(1) 如果 G 满足 $\text{CDE}(n, 0)$, 那么对所有 $t > 0$,

$$\frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{q}{2} \leq \frac{n}{2t} + \frac{1}{2}\sqrt{n\eta\sqrt{2D_\mu}}.$$

(2) 如果 G 满足 $\text{CDE}(n, -K)$, $K \geq 0$, 令 $0 < \alpha < 1$, 那么对所有 $t > 0$,

$$\frac{(1-\alpha)\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{q}{2} \leq \frac{n}{2t(1-\alpha)} + \frac{1}{2}C'(\alpha, n, K, \eta, D_\mu, D_\omega),$$

这里 $C'(\alpha, n, K, \eta, D_\mu, D_\omega) = \sqrt{(\frac{nK}{\alpha})^2 + n\eta\sqrt{2D_\mu} + n\frac{\alpha}{1-\alpha}\eta\sqrt{2D_\mu D_\omega}}$.

定理 3.1 的证明与文 [2, 定理 4.10] 的证明非常类似, 只需要用引理 2.4 去代替文 [2] 中方程 (4.12), (4.13) 等用链式法则求导的地方. 在这里不再给出具体证明.

定理 3.2 设 G 为一个有限 (或无限) 图, $x_0 \in V$. 对于函数 $q(x, t)$ 满足 $\Gamma(q) \leq \eta^2$, 如果 $d(x, x_0) < 2R$, $R > 0$, 令 $u: V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为热方程 $(L - q)u(x, t) = 0$ 的一个正解. 如果 G 满足 $\text{CDE}(n, -K)$, $K > 0$, 那么对所有 $t > 0$, 在以 x_0 为中心 R 为半径的球内, 对 $0 < \alpha < 1$, 有

$$\frac{(1-\alpha)\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{q}{2} \leq \frac{n}{2t(1-\alpha)} + \frac{2nD_\mu}{R(1-\alpha)} + \frac{1}{2}C'(\alpha, n, K, \eta, D_\mu, D_\omega),$$

这里 $C'(\alpha, n, K, \eta, D_\mu, D_\omega) = \sqrt{(\frac{nK}{\alpha})^2 + n\eta\sqrt{2D_\mu} + n\frac{\alpha}{1-\alpha}\eta\sqrt{2D_\mu D_\omega}}$.

由定理 3.1 和文 [2, 定理 4.15] 的证明思路, 易证定理 3.2, 证明从略.

注 3.3 (1) 在上述两个定理证明中, 由引理 2.4, 可以彻底避免用链式法则求导.

(2) 可以比较定理 3.1 与文 [2, 定理 4.10], 定理 3.2 与文 [2, 定理 4.15], 易知

$$\sqrt{n\psi\sqrt{2D_\mu D_\omega}} < \sqrt{n(\vartheta + \eta\sqrt{2D_\mu(D_\omega + 1)})}, \quad C' < C.$$

因此, 我们的结果比文 [2] 中的结果更精细.

3.2 图上定理 B 的离散形式

给定 C^1 函数 $c(t): (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, 并设 $c(t)$ 满足下列条件:

(A1) 对任意 $t > 0$, $c(t) \geq e^{-2Kt}$, $c'(t) < 0$, 且 $\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = 1$;

(A2) 对任意 $T > 0$, $C(t) = -\frac{c'(t)}{c(t)}$ 在区间 $[0, T]$ 上连续可积. 另外, 令

$$\alpha(t) = -\int_0^t C(t)dt + 2Kt + 1.$$

显然, $\alpha(t) > 1$.

定理 3.4 设 G 为有限图, $u = u(x, t)$ 是图 G 上热方程 $(L - q)u(x, t) = 0$ 的正解. 假设对所有的 $x \in V$ 和 $t \geq 0$, $q = q(x, t)$ 满足 $\Gamma(q) \leq \eta^2$. 如果对 $K \geq 0$, G 满足 $\text{CDE}(n, -K)$, 那么对任意 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t)\frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t)q}{2} &\leq \frac{D_\mu - nK + 1}{2} + \frac{nC(t)}{8} \\ &\quad + \frac{1}{2C(t)}[\eta\sqrt{2D_\mu} + (\alpha(t) - 1)\eta\sqrt{2D_\mu D_\omega} + nK^2]. \end{aligned}$$

通过改进定理 3.1 的证明, 来证明定理 3.4. 证明的思路来源于文 [11] 和 [4].

证明 首先, 令

$$H = c(t) \cdot \left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)u_t}{u} - \alpha(t)q \right]. \quad (3.1)$$

由 $u_t = \Delta u - qu$ 和引理 2.1, 得

$$H = c(t) \cdot \frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)\Delta u}{u} = c(t) \cdot \frac{(1 - \alpha(t))\Delta u - 2\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u}.$$

固定 T , 设在区域 $V \times [0, T]$ 内 H 在 (x^*, t^*) 处取得最大值, 而且可以设 $H(x^*, t^*) > 0$, 进而, $t^* > 0$ 且 $\Delta\sqrt{u}(x^*, t^*) < 0$. 以下所有的计算都认为是在点 (x^*, t^*) 处进行的. 由引理 2.3, 取 $H = u$, 得

$$\begin{aligned} & c(t^*)[(1 - \alpha(t^*))q\Delta u - 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}] \\ &= quH = L(u)H \geq L(uH) \\ &= -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*) \left[2\Delta\Gamma(\sqrt{u}) - 4\Gamma\left(\sqrt{u}, \frac{\partial}{\partial t}(u)\right) + \alpha'(t^*)\Delta u - \alpha(t^*)\Delta L(u) \right] \\ &= -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u}) + 2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u})] + \alpha'(t^*)\Delta u - \alpha(t^*)\Delta qu. \end{aligned}$$

整理上式, 得

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u})] \\ &\quad + c(t^*)[2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + \alpha'(t^*)\Delta u - \alpha(t^*)\Delta qu + (\alpha(t^*) - 1)q\Delta u + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}] \\ &= -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u}) + \alpha'(t^*)\Delta u] \\ &\quad + c(t^*)[2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u} - \Delta qu] + c(t^*)(\alpha(t^*) - 1)(q\Delta u - \Delta qu) \\ &\geq -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u}) + \alpha'(t^*)\Delta u] \\ &\quad + c(t^*)[-\eta u\sqrt{2D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{2D_\mu D_\omega}]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

取

$$\varphi = \frac{nc'}{2c} + nK. \quad (3.3)$$

由 (3.2), (3.3) 并利用 $\text{CDE}(n, -K)$ 不等式, 得

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*) \left[\frac{4u}{n} \left(\frac{\Delta u - 2\Gamma(\sqrt{u})}{2u} \right)^2 - 4K\Gamma(\sqrt{u}) + \alpha'(t^*)\Delta u \right] \\ &\quad + c(t^*)[-\eta u\sqrt{2D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{2D_\mu D_\omega}] \\ &\geq -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*) \left[-\frac{2\varphi}{n}(\Delta u - 2\Gamma(\sqrt{u})) - \frac{u\varphi^2}{n} - 4K\Gamma(\sqrt{u}) + \alpha'(t^*)\Delta u \right] \\ &\quad + c(t^*)[-\eta u\sqrt{2D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{2D_\mu D_\omega}] \\ &= -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*) \left(\alpha'(t^*) - \frac{2\varphi}{n} \right) \Delta u + c(t^*) \left(\frac{4\varphi}{n} - 4K \right) \Gamma(\sqrt{u}) - \frac{c(t^*)\varphi^2}{n} u \\ &\quad + c(t^*)[-\eta u\sqrt{2D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{2D_\mu D_\omega}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

可以验证

$$c(t^*) \left(\alpha'(t^*) - \frac{2\varphi}{n} \right) = 0; \quad (3.5)$$

$$c(t^*) \left(\frac{4\varphi}{n} - 4K \right) = 2c'(t^*) < 0. \quad (3.6)$$

另外, 由引理 2.2, 得

$$\begin{aligned} \Gamma(\sqrt{u(x^*, t^*)}) &= \frac{1}{2} \sum_{y \sim x^*} (\sqrt{u(y, t^*)} - \sqrt{u(x^*, t^*)})^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{y \sim x^*} (u(y, t^*) + u(x^*, t^*)) \\ &< \frac{D_\mu + 1}{2} u(x^*, t^*). \end{aligned} \quad (3.7)$$

由 (3.4)–(3.7), 得

$$-\frac{c'(t^*)H}{c(t^*)} \leq -(D_\mu + 1)c'(t^*) + c(t^*)[\eta\sqrt{2D_\mu} + (\alpha(t^*) - 1)\eta\sqrt{2D_\mu D_\omega}] + \frac{c(t^*)\varphi^2}{n}. \quad (3.8)$$

由 (3.3) 和 (3.8), 得

$$H \leq c(t^*)(D_\mu - nK + 1) + \frac{-nc'(t^*)}{4} + \frac{c^2(t^*)}{-c'(t^*)}[\eta\sqrt{2D_\mu} + (\alpha(t^*) - 1)\eta\sqrt{2D_\mu D_\omega} + nK^2].$$

因为 $\frac{\partial\sqrt{u}}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{\partial u}{\partial t}$ 且 $C(t) = -\frac{c'(t)}{c(t)}$, 得

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t^*) \frac{\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t^*)q}{2} &\leq \frac{D_\mu - nK + 1}{2} + \frac{nC(t^*)}{8} \\ &+ \frac{1}{2C(t^*)}[\eta\sqrt{2D_\mu} + (\alpha(t^*) - 1)\eta\sqrt{2D_\mu D_\omega} + nK^2]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

由于 T 是任意的, 证毕.

定理 3.5 设 G 为有限 (或无限) 图, 且 $x_0 \in V$. 如果 $d(x, x_0) < 2R$ ($R > 0$), 令 $u : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $(L - q)u(x, t) = 0$ 的正解, 这里 $\Gamma(q) \leq \eta^2$. 此外, 如果 G 满足 $\text{CDE}(n, -K)$, $K > 0$, 那么对所有 $t > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t) \frac{\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t)q}{2} &\leq \frac{-C}{C - D_\mu}(nK + D_\mu + 1) + \frac{2D_\mu\alpha(t)}{R} \\ &+ \frac{1}{C - D_\mu}[\eta\sqrt{2D_\mu} + (\alpha(t) - 1)\eta\sqrt{2D_\mu D_\omega} + nK^2] + \frac{nC^2}{4(C - D_\mu)}, \end{aligned}$$

这里 $C(t) = -\frac{c'}{c} > D_\mu$.

证明 定义函数 $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\phi(v) = \begin{cases} 0, & d(v, x_0) > 2R, \\ \frac{2R - d(v, x_0)}{R}, & 2R \geq d(v, x_0) \geq R, \\ 1, & R > d(v, x_0). \end{cases}$$

取

$$\begin{aligned} G &= c(t)\phi \left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)u_t}{u} - \alpha(t)q \right] = c(t)\phi \left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)\Delta u}{u} \right] \\ &= c(t)\phi \left[\frac{2(1 - \alpha(t))\Gamma(\sqrt{u}) - 2\alpha(t)\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u} \right] \\ &= c(t)\phi \left[\frac{(1 - \alpha(t))\Delta u - 2\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

固定 t^* , 设在区域 $V \times \{t^*\}$ 内 G 在 (x^*, t^*) 处取得最大值, 而且可以设 $G(x^*, t^*) > 0$, 进而, $t^* > 0$ 且 $\Delta\sqrt{u(x^*, t^*)} < 0$. 以下所有的计算都认为是在点 (x^*, t^*) 处进行的. 考虑下面两种情况:

情形 (a) $\phi(x^*) = \frac{1}{R}$, 亦即 $d(v, x_0) = 2R - 1$, 有

$$\begin{aligned} G(x^*, t^*) &= c(t^*)\phi \left[\frac{2(1 - \alpha(t^*))\Gamma(\sqrt{u}) - 2\alpha(t)\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u}(x^*, t^*) \right] \\ &\leq 2\alpha(t^*)c(t^*)\phi \frac{-\Delta\sqrt{u}(x^*, t^*)}{\sqrt{u}(x^*, t^*)}. \end{aligned}$$

由文 [2] 得

$$\frac{-\Delta\sqrt{u}(x^*, t^*)}{\sqrt{u}(x^*, t^*)} < D_\mu.$$

因此有

$$G(x, T) \leq G(x^*, t^*) \leq \frac{2D_\mu\alpha(t^*)c(t^*)}{R} \leq \frac{2D_\mu\alpha(T)c(T)}{R} \leq \frac{2D_\mu\alpha(T)}{R}.$$

情形 (b) $\phi(x^*) = \frac{s}{R}$, 这里 $s \geq 2$, 即 $d(v, x_0) = 2R - s$. 以下所有的计算都认为是在点 (x^*, t^*) 处进行的. 由引理 2.3, 令 $F = \frac{u}{\phi}$, 有

$$L\left(\frac{u}{\phi}\right)G \geq L\left(\frac{uG}{\phi}\right) = L(uH),$$

这里 H 定义如 (3.1).

$$L(uH) = -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*) \left[\left(2\Delta\Gamma(\sqrt{u}) - 4\Gamma\left(\sqrt{u}, \frac{\partial}{\partial t}(u)\right) + \alpha'(t)\Delta u - \alpha(t)\Delta L(u) \right) \right].$$

另一方面, 当 $\phi(x^*) = \frac{s}{R}$ 时, 有

$$\begin{aligned} L\left(\frac{u}{\phi}\right) &= \widetilde{\sum_{y \sim x}} \left(\frac{u(y, t)}{\phi(y)} - \frac{u(x, t)}{\phi(x)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u(x, t)}{\phi(x)} \right) \\ &= \widetilde{\sum_{y \sim x}} \left(\frac{u(y, t)}{\phi(y)} - \frac{u(x, t)}{\phi(x)} \right) - \frac{1}{\phi(x)} (\Delta u - qu) \\ &= \widetilde{\sum_{y \sim x}} \left(\frac{u(y, t)}{\phi(y)} - \frac{u(x, t)}{\phi(x)} \right) - \frac{1}{\phi(x)} \widetilde{\sum_{y \sim x}} (u(y, t) - u(x, t)) + \frac{qu}{\phi(x)} \\ &= \widetilde{\sum_{y \sim x}} \left(\frac{1}{\phi(y)} - \frac{1}{\phi(x)} \right) u(y, t) + \frac{qu}{\phi(x)} \\ &\leq \widetilde{\sum_{y \sim x}} \left| \frac{1}{\phi(y)} - \frac{1}{\phi(x)} \right| u(y, t) + \frac{qu}{\phi(x)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

当 $\phi(x^*) = \frac{s}{R}$ 时, 对任意 $y \sim x^*$, 有 $\phi(y) = \frac{s \pm 1}{R}$ 或 $\phi(y) = \frac{s}{R}$. 总之, 有

$$\left| \frac{1}{\phi(y)} - \frac{1}{\phi(x)} \right| \leq \frac{R}{s(s-1)} \leq \frac{1}{\phi(x^*)}.$$

由引理 2.2, 有

$$\begin{aligned} L\left(\frac{u}{\phi}\right)G &\leq \frac{D_\mu u(x, t)G}{\phi} + \frac{quG}{\phi} \\ &= \frac{D_\mu u(x, t)G}{\phi} + \beta[(1 - \alpha(t))q\Delta u - 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

取 $\varphi = \frac{nc'}{2c} + nK$, 利用 $\text{CDE}(n, -K)$ 不等式, 得

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\frac{c'(t^*)uG}{c(t^*)\phi} - \frac{D_\mu uG}{\phi} + c(t)[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u}) + \alpha'(t)\Delta u] \\ &\quad + c(t)[2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u} - \Delta qu] + \beta(\alpha(t^*) - 1)(q\Delta u - \Delta qu) \\ &\geq \left(-\frac{c'}{c} - D_\mu\right) \cdot \frac{uG}{\eta} + c'(D_\mu + 1)u \\ &\quad + c[-\eta u\sqrt{2D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{2D_\mu D_\omega}] - \frac{c\varphi^2}{n}u. \end{aligned} \quad (3.13)$$

整理上式, 得

$$\begin{aligned} &(-c' - cD_\mu) \left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)u_t}{u} - \alpha(t)q \right] \\ &\leq c'(nK + D_\mu + 1) + c[\eta\sqrt{2D_\mu} + (\alpha(t) - 1)\eta\sqrt{2D_\mu D_\omega} + nK^2] + \frac{nc'^2}{4c}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

这里 $C(t) = -\frac{c'}{c} > D_\mu$. 有

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t) \frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t)q}{2} &\leq \frac{-C}{C - D_\mu}(nK + D_\mu + 1) + \frac{2D_\mu\alpha(t)}{R} \\ &\quad + \frac{1}{C - D_\mu}[\eta\sqrt{2D_\mu} + (\alpha(t) - 1)\eta\sqrt{2D_\mu D_\omega} + nK^2] + \frac{nC^2}{4(C - D_\mu)}. \end{aligned}$$

证毕.

有下列定义:

定义 3.6 令 (G, V) 表示一个图, 满足 $\text{CDE}(n, -K)$ 不等式, 这里 $K \geq 0$. 称 $\phi: V \rightarrow [0, 1]$ 是一个以 $x_0 \in V$ 为中心 (c, R) -强截断函数, 如果在集合 $S \subset V$ 上 $\phi(x_0) = 1$, 在 $x \in S$ 上 $\phi(x) = 0$, 且对任意 $x \in S$,

(1) 或者 $\phi(x) < \frac{m(1+R\sqrt{K})}{2R^2}$;

(2) 或者 ϕ 在 v 的小邻域内存在且 $\phi^2(x)\Delta\frac{1}{\phi}(x) \leq D_\mu\frac{m(1+R\sqrt{K})}{R^2}$ 和 $\phi^3(x)\Gamma(\frac{1}{\phi})(x) \leq D_\mu\frac{m}{R^2}$,

这里 $m = m(n)$ 仅与 n 有关.

我们有下面定理:

定理 3.7 设 $G(V, E)$ 为满足 $\text{CDE}(n, -K)$ 不等式的图, 这里 $K \geq 0$. 令 $R > 0$ 且固定 $x_0 \in V$. 设 G 在集合 $S \subset V$ 上有一个以 x_0 为中心的 (c, R) -强截断函数. 如果 $x \in S$, $q(x, t)$ 满足 $\Gamma(q) \leq \eta^2$, 令 $u: V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $(L - q)u(x, t) = 0$ 的正解. 那么, 对所有 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t) \frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t)q}{2} &\leq \frac{C}{C - A}(D_\mu - nK + 1) + \frac{m(1 + R\sqrt{K})D_\mu\alpha(T)}{R^2} \\ &\quad + \frac{1}{C - A}[\eta\sqrt{2D_\mu} + (\alpha(t) - 1)\eta\sqrt{2D_\mu D_\omega} + nK^2] + \frac{nC^2}{4(C - A)}, \end{aligned}$$

这里 $A = D_\mu\frac{m(1+R\sqrt{K})}{R^2} + (1 + D_\omega)\sqrt{1 + D_\mu}\sqrt{2D_\mu\frac{m}{R^2}}$, $C(t) = -\frac{c'}{c} > A$.

证明 取

$$\begin{aligned} G &= c(t)\phi \left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)u_t}{u} - \alpha(t)q \right] = c(t)\phi \left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)\Delta u}{u} \right] \\ &= c(t)\phi \left[\frac{2(1 - \alpha(t))\Gamma(\sqrt{u}) - 2\alpha(t)\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

固定 t^* , 设在区域 $V \times t^*$ 内 G 在 (x^*, t^*) 处取得最大值, 而且可以设 $G(x^*, t^*) > 0$, 进而, $t^* > 0$ 且 $\Delta\sqrt{u(x^*, t^*)} < 0$. 以下所有的计算都认为是在点 (x^*, t^*) 处进行的. 考虑下面两种情况:

情形 (a) $\phi(x^*) < \frac{m(1+R\sqrt{K})}{2R^2}$. 有

$$\begin{aligned} G(x^*, t^*) &= c(t^*)\phi \left[\frac{2(1 - \alpha(t^*))\Gamma(\sqrt{u}) - 2\alpha(t)\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u} (x^*, t^*) \right] \\ &\leq 2\alpha(t^*)c(t^*)\phi \frac{-\Delta\sqrt{u}(x^*, t^*)}{\sqrt{u}(x^*, t^*)} < \frac{m(1 + R\sqrt{K})D_\mu\alpha(T)}{R^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

情形 (b) 定义 3.6 的第二条成立. 以下所有的计算都认为是在点 (x^*, t^*) 处进行的. 由定理 3.5 的证明, 得

$$L\left(\frac{u}{\phi}\right)G \geq -\frac{c'}{c} \cdot \frac{uG}{\phi} + c \left[2\Delta\Gamma(\sqrt{u}) - 4\Gamma\left(\sqrt{u}, \frac{\partial_t(u)}{2\sqrt{u}}\right) + \alpha'(t)\Delta u - \alpha(t)\Delta L(u) \right]. \quad (3.17)$$

另一方面, 由文 [2, (4.23)], 得

$$L\left(\frac{u}{\phi}\right) \leq \frac{qu}{\phi} + u\Delta\frac{1}{\phi} + 2\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right) \cdot \sqrt{\Gamma(u)}}. \quad (3.18)$$

由 (3.17) 和 (3.18), 得

$$\begin{aligned} &c[(1 - \alpha(t))q\Delta u - 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}] + uG\Delta\frac{1}{\phi} + 2G\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right) \cdot \sqrt{\Gamma(u)}} \\ &\geq -\frac{c'}{c} \cdot \frac{uG}{\phi} + c \left[2\Delta\Gamma(\sqrt{u}) - 4\Gamma\left(\sqrt{u}, \frac{\partial_t(u)}{2\sqrt{u}}\right) + \alpha'(t)\Delta u - \alpha(t)\Delta L(u) \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

整理上式, 得

$$\begin{aligned} &\frac{c'}{c} \cdot \frac{uG}{\phi} + uG\Delta\frac{1}{\phi} + 2G\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right) \cdot \sqrt{\Gamma(u)}} \\ &\geq c[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u}) + \alpha'(t)\Delta u] + c[2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u} - \Delta qu] + \beta(\alpha(t^*) - 1)(q\Delta u - \Delta qu) \\ &\geq c'(D_\mu + 1)u + c[-\eta u\sqrt{2D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{2D_\mu D_\omega}] - \frac{c\varphi^2}{n}u. \end{aligned} \quad (3.20)$$

用 $\frac{c\phi^2}{u}$ 去乘上式, 由文 [2, (4.25), (4.26)], 得

$$\begin{aligned} &c'\phi G + cG\phi^2\Delta\frac{1}{\phi} + \beta G\sqrt{2\phi^3\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right) \cdot \sqrt{\phi\frac{2\Gamma(u)}{u^2}}} \\ &\leq c'\phi G + cGD_\mu\frac{m(1 + R\sqrt{K})}{R^2} + cG(1 + D_\omega)\sqrt{2D_\mu\frac{m}{R^2}} \cdot \sqrt{\phi\frac{2\Gamma(\sqrt{u})}{u}} \\ &\leq c'G + cGD_\mu\frac{m(1 + R\sqrt{K})}{R^2} + cG(1 + D_\omega)\sqrt{1 + D_\mu}\sqrt{2D_\mu\frac{m}{R^2}} \\ &= (c' + cA)G, \end{aligned} \quad (3.21)$$

这里

$$A = D_\mu\frac{m(1 + R\sqrt{K})}{R^2} + (1 + D_\omega)\sqrt{1 + D_\mu}\sqrt{2D_\mu\frac{m}{R^2}}.$$

当 $C(t) = -\frac{c'}{c} > A$ 时, 由 (3.16), (3.20) 和 (3.21), 有

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t) \frac{\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t)q}{2} &\leq \frac{C}{C-A} (D_\mu - nK + 1) + \frac{m(1 + R\sqrt{K})D_\mu \alpha(T)}{R^2} \\ &\quad + \frac{1}{C-A} [\eta\sqrt{2D_\mu} + (\alpha(t)-1)\eta\sqrt{2D_\mu D_\omega} + nK^2] + \frac{nC^2}{4(C-A)}. \end{aligned}$$

证毕.

例 3.8 由定理 3.4, 3.5 和 3.7, 根据满足条件 (A1) 和 (A2) 的不同的 $c(t)$, 给出一些例子.

(1) 取 $c(t) = e^{-Kt}$. 由定理 3.4 得

$$\frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - (1 + Kt) \left(\frac{\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{q}{2} \right) \leq C_1 + C_2 t, \quad (3.22)$$

这里 $C_1 = \frac{D_\mu+1}{2} + \frac{nK}{8} + \frac{\eta\sqrt{D_\mu}}{2K}$, $C_2 = \frac{\eta\sqrt{D_\mu D_\omega}}{2}$. 由定理 3.5 和 3.7, 仍然可以得到不等式 (3.22), 但这里 C_1 和 C_2 有变化.

(2) 取 $c(t) = e^{\sinh^{-1}(Kt)}$, 易知 $c'(t) < 0$, $C(t) = K \sinh^{-2}(Kt) \cosh(Kt)$. 由定理 3.4 得

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - (1 + 2Kt + \sinh^{-1}(Kt)) \left(\frac{\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{q}{2} \right) \\ &\leq \frac{D_\mu+1}{2} + \left(\frac{\coth(Kt) \operatorname{csch}(Kt)}{8} + \frac{\tanh(Kt) \operatorname{sech}(Kt)}{2} - 1 \right) nK \\ &\quad + \frac{\tanh(Kt) \operatorname{sech}(Kt)}{2K} [\eta\sqrt{D_\mu} + (2Kt + \sinh^{-1}(Kt))\eta\sqrt{D_\mu D_\omega}]. \end{aligned}$$

由定理 3.5 和 3.7, 可得类似结果.

4 图上的 Harnack 型不等式

首先, 将文 [11, 引理 5.1] 和文 [2, 引理 5.3] 的证明结合在一起, 可得下列引理.

引理 4.1 对任意 $\alpha(t) > 0$ 和函数 $\chi, q_1, q_2 : [T_1, T_2] \rightarrow \mathcal{R}$, 有

$$\begin{aligned} &\min_{s \in [T_1, T_2]} \chi(s) - \frac{1}{\alpha(t)} \int_s^{T_2} \chi^2(t) dt + \int_{T_1}^s q_1(t) dt + \int_s^{T_2} q_2(t) dt \\ &\leq \frac{2 \int_{T_1}^{T_2} ds \int_{T_1}^s \alpha(u) du}{(T_2 - T_1)^3} + \int_{T_1}^{T_2} \left[q_2(t) \int_{T_1}^t \phi(s) ds + q_1(t) \int_t^{T_2} \phi(s) ds \right] dt, \end{aligned}$$

这里 $\phi(s) = 2 \int_{T_1}^s \frac{1}{\alpha(t)} dt$.

由上述引理, 且根据文 [11, 定理 5.2] 和文 [2, 定理 5.1] 的证明, 得下面 Harnack 不等式.

定理 4.2 设 $G = (V, E)$ 为一个图, 对于 $x_0 \in V$, 且 $x \in B(x_0, R)$, $R \geq 0$, 函数 $\alpha(t) > 1$, χ , 有 $f : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 满足

$$\frac{\Gamma(f)}{f^2}(x, t) - \alpha(t) \frac{\frac{\partial}{\partial t} f}{f}(x, t) - \alpha(t) q(x, t) \leq \chi(t).$$

那么, 对于 $T_1 < T_2$ 且 $x, y \in V$, 有

$$f(x, T_1) \leq f(y, T_2) \cdot \exp \left(\int_{T_1}^{T_2} \frac{\chi(t)}{\alpha(t)} dt \right) + \varrho_{q, x_0, R, \mu_{\max}, \omega_{\min}}(x_1, x_2, T_1, T_2),$$

这里

$$\begin{aligned} \varrho_{q, x_0, R, \mu_{\max}, \omega_{\min}}(x_1, x_2, T_1, T_2) = \inf \bigg\{ & \sum_{i=0}^{k-1} \frac{4\mu_{\max} k^3}{\omega_{\min}(T_2 - T_1)^3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int_{t_i}^s \alpha(u) du \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[q(x_{i+1}, t) \int_{t_i}^t \phi(s) ds + q(x_i, t) \int_t^{t_{i+1}} \phi(s) ds \right] dt \right) \bigg\}. \end{aligned}$$

由上述 Harnack 不等式, 结合文 [2, 7.2 节], 可得有限图 G 上的最小特征值的一个上界估计.

定理 4.3 设 $G = (V, E)$ 为一个有限图, 满足 $\text{CDE}(n, -K)$ 不等式, 且 $K > 0$. 令 $0 < \alpha < 1$, 有

$$\lambda_1 \leq \max\{C\sqrt{K}h, C^2h^2\},$$

这里 C 仅与 n 和 $\mu_{\max}$ 有关.

致谢 对审稿人表示由衷的感谢.

参 考 文 献

- [1] Bakry D., Qian Z. M., Harnack inequalities on manifold with positive or nonnegative Ricci curvature, *Revista. Math. Iber.*, 1999, **15**: 143–179.
- [2] Bauer F., Horn P., Lin Y., et al., Li–Yau inequality on graphs, Arxiv: 1306.2561v2.
- [3] Chen L., Chen W. Y., Gradient estimates for a nonlinear parabolic equation on complete non-compact Riemannian manifolds, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 2009, **35**: 397–404.
- [4] Huang G. Y., Huang Z. J., Li H. Z., Gradient estimates for the porous medium equations on Riemannian manifolds, *J. Geom. Anal.*, 2013, **23**: 1851–1875.
- [5] Huang G. Y., Ma B. Q., Gradient estimates for a nonlinear parabolic equation on Riemannian manifolds, *Arch. Math. Basel*, 2010, **94**: 265–275.
- [6] Li J. F., Xu X. J., Differential Harnack inequalities on Riemannian manifolds I: linear heat equation, *Adv. Math.*, 2011, **226**: 4456–4491.
- [7] Li P., Yau S. T., On the parabolic kernel of the Schrödinger operator, *Acta. Math.*, 1986, **156**: 153–201.
- [8] Li X. D., Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds, *J. Math. Pures Appl.*, 2005, **84**: 1295–1361.
- [9] Lin Y., Yau S. T., Ricci curvature and eigenvalue estimate on locally finite graphs, *Math. Res. Lett.*, 2010, **17**: 343–356.
- [10] Ma L., Gradient estimates for a simple elliptic equation on complete non-compact Riemannian manifolds, *J. Funct. Anal.*, 2006, **241**: 374–382.
- [11] Qian B., Remarks on Li–Yau inequality on graphs, arXiv: 1311.3367.
- [12] Yang Y. Y., Gradient estimates for a nonlinear parabolic equation on Riemannian manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2008, **136**: 4095–4102.